基于自适应半耦合字典学习的超分辨率图像重建 *

黄陶冶，孙恬恬，周正华，赵建伟

(中国计量大学 理学院 应用数学系，杭州 310018)

摘　要：在超分辨图像重建领域，如何平衡字典学习中表示系数的稀疏性和协同性对重建效果具有重要意义。针对该问题，在半耦合字典学习的超分辨重建基础上，利用核范数构建一个新的正则项，将稀疏性和协同性作为一个整体进行考虑，并用交替方向乘子法(ADMM)求解优化模型，得到了基于自适应半耦合字典学习的超分辨率图像重建算法。实验结果表明，该方法比现有的一些基于字典学习的重建方法具有更好的重建效果。所提出的算法能根据字典的变化自适应地平衡稀疏性与关联性，并通过两者之间的协调产生一个最合适的系数，因此在噪声环境下具有一定的抗干扰能力。

关键词：超分辨率重建；半耦合字典学习；自适应；核范

中图分类号：TP391.41　　doi: 10.19734/j.issn.1001-3695.2018.11.0852

Image super-resolution reconstruction based on adaptive semi-coupled dictionary learning

Huang Taoye, Sun Tiantian, Zhou Zhenghua, Zhao Jianwei

(*Dept. of Applied Mathematics, College of Sciences, China Jiliang University, Hangzhou* 310018, *China*)

Abstract: In the field of image super-resolution, how to balance the sparsity and cooperation of the representation coefficients in the dictionary learning is of great significance for the reconstruction result. For this problem, this paper proposes an adaptive semi-coupled dictionary learning super-resolution method based on semi-coupled dictionary-learning method. The method uses the kernel norm to construct a new regularization term to consider the sparsity and cooperation together, and adopts the alternating direction multiplier method (ADMM) to solve the optimal model. The experimental results show that the proposed method is more effective than some other existing dictionary-learning based reconstruction methods. The proposed method can balance the sparsity and correlation according to the variation of dictionary to produce an appropriate coefficient adaptively. Hence, it has anti-interference ability to the noisy environment.

Key words: super-resolution reconstruction; semi-coupled dictionary learning; adaptivity; nuclear norm

0　引言

现实生活中，低分辨率图像往往是由原始的高分辨图像经过下采样、模糊、噪声污染等退化过程得到的。图像超分辨率重建是上述图像退化的逆过程，旨在从低分辨率图像中恢复出高分辨率图像，它是计算机视觉领域中的一个研究热点[1]。目前，图像超分辨率重建已在多个领域得到广泛应用，如智能监控[2]、地理遥感[3]、医学诊断[4]等。

关于图像超分辨率重建方法目前主要分为基于插值的方法[5]、基于重建的方法[6]和基于学习的方法[7]。其中，基于学习的超分辨率重建方法包括基于字典学习[8]、基于深度学习[9]等方法，通过学习高、低分辨率图像块之间的映射关系，以此获得先验知识并运用于图像重建过程中。本文讨论这类中的基于字典学习的超分辨率重建方法。

2008 年，Yang 等人[8]基于压缩感知理论，首次提出了基于稀疏编码的图像超分辨率重建（sparse coding super-resolution，SCSR）方法。该方法假设高、低分辨率图像块在各自的高、低分辨率字典下所对应的稀疏表示系数是相同的，那么就可以通过低分辨率图像块在低分辨率字典下求解得到的稀疏表示系数与高分辨率字典相乘重建出相应的高分辨率图像块。在此基础上，Zeyde 等人对训练高、低分辨率字典进行了改进，利用主成份分析对低分辨率图像块所提取的特征进行降维，并用 K-奇异值分解算法[10]训练低分辨率字典，最后通过高分辨率图像块与稀疏系数的伪逆相乘得到高分辨率字典。该方法不仅比 SCSR 能取得更好的重建效果，重建速度也有所提高[11]。Lu 等人[12]认为图像中结构相似的图像块应该具有相似的表示系数，因此在约束模型中添加非局部自相似性正则项，提出了基于非局部自相似稀疏编码的超分辨率重建方法。该方法保持了图像的几何结构，同时也增强了模型的稳定性。Cao 等人[13]在 Yang 的基础上，将约束模型中的 ℓ_1 正则项改成 $\ell_p(0<p<1)$ 正则项，得到更稀疏的表示系数，从而提出了更有效的基于 $\ell_p(0<p<1)$ 正则化的超分辨率重建方法。Hojjat 等人[14]考虑彩色通道之间交互信息，通过颜色信息将基于稀疏表示的超分辨率重建方法扩展到多个颜色通道。Xie 等人[15]为了抑制稀疏编码噪声采用双向相似点进行建模和构造，形成一对互补的正则化项，然后对原始稀疏系数进行了额外的对齐，从而获得了更好的恢复效果。Yang 等人[16]利用局部子字典对图像块进行编码，较好地刻画了图像的局部结构。

另外，Cai 等人[17]考虑表示系数的协同性，将 SCSR 中的 ℓ_1 正则项替换为 ℓ_2 正则项，同时认为一个较小窗口内的图像具有相似的几何结构，提出了局部结构相似性和协同表示

收稿日期：2018-11-16；**修回日期：**2019-01-02　**基金项目：**国家自然科学基金（61571410）；浙江省自然科学基金项目（LY18F020018，LSY19F020001）

作者简介：黄陶冶（1994-），男，浙江温岭人，硕士研究生，主要研究方向为图像处理、智能计算等；孙恬恬（1993-），女，贵州遵义人，硕士研究生，主要研究方向为图像处理、智能计算等；周正华（1977-），男，陕西商洛人，副教授，硕导，博士，主要研究方向为图像处理、智能计算等；赵建伟（1977-），女（通信作者），浙江兰溪人，教授，硕导，博士，主要研究方向为图像处理、智能计算等（zhaojw@amss.ac.cn）.

（local structural similarity and collaborative representation，LCR）的重建方法[18]，该方法大大加快了图像重建速度。Zhao 等人[19]将稀疏性和协同性作为一个整体考虑，利用核范在约束模型中构建了一个新的正则项，提出了自适应稀疏编码的超分辨率（adaptive sparse coding based super-resolution，ASCSR）重建方法，自适应地平衡表示系数的稀疏性和协同性。

上述基于稀疏编码的超分辨率重建方法都是在假设“高、低分辨率图像块在各自的高、低分辨率字典下所对应的稀疏表示系数是相同的”下进行的。而 Wang 等人[20]考虑高、低分辨率图像块对应的稀疏表示系数存在某种线性关系，在 SCSR 方法的基础上提出了基于半耦合字典学习（semi-coupled dictionary learning，SCDL）的稀疏编码算法，并应用于超分辨率图像重建中，取得较好的重建效果。

本文在半耦合字典学习的重建方法基础上，考虑表示系数的稀疏性和协同性，提出一种自适应半耦合字典学习的超分辨率图像(adaptive semi-coupling dictionary for super-resolution，ASCDSR)重建方法。该方法假设高、低分辨率图像块在高、低分辨率字典下所对应的表示系数并不相等，而是存在某种线性关系，并利用核范在约束模型中构建了一个新的正则项，平衡表示系数的稀疏性和协同性，然后用交替方向乘子法(alternating direction method of multipliers，ADMM)[21]求解模型，最后将高分辨率字典与高分辨率下的表示系数相乘得到重建的高分辨率图像块。本文的方法同时考虑了表示系数的稀疏性和协同性，能自适应地平衡两者之间的关系，对噪声污染等实际情况具有较好的重建效果。

1　本文所提的超分辨率重建方法

本节将在基于半耦合字典学习的重建方法基础上，考虑表示系数的稀疏性和协同性，给出一种基于自适应半耦合字典学习的超分辨率图像重建方法，具体方法如下。

对于待重建的低分辨率图像 I_ℓ，设 $Y=[y_1,y_2,\cdots,y_n]$，其中 y_i 为该低分辨率图像的块拉成的列向量，$i=1,2,\cdots,n$；$X=[x_1,x_2,\cdots,x_n]$，其中 x_i 是与 y_i 相对应的待建的高分辨率图像块所拉成的列向量，$i=1,2,\cdots,n$.本文首先利用外部图片训练高、低分辨率字典 D_X 和 D_Y 及其稀疏表示系数之间的映射关系。

设 $X'=[x'_1,x'_2,\cdots,x'_m]$，$Y'=[y'_1,y'_2,\cdots,y'_m]$，其中 x'_i 和 y'_i 分别表示外部图片相应的高、低分辨率图像块拉成的列向量，$i=1,2,\cdots,m$，本文首先利用 SCDL 中的优化模型训练高、低分辨率字典 D_X 和 D_Y 及其高、低分辨率图像的稀疏表示系数之间的映射关系，具体数学模型如下:

$$\begin{aligned}\min_{D_X,D_Y,W_{X\to Y},W_{Y\to X}} &\|X'-D_X\Lambda_{X'}\|_F^2+\|Y'-D_Y\Lambda_{Y'}\|_F^2+\\ &\gamma_1\|\Lambda_{X'}-W_{Y\to X}\Lambda_{Y'}\|_F^2+\gamma_2\|\Lambda_{Y'}-W_{X\to Y}\Lambda_{X'}\|_F^2+\\ &\gamma_3\|\Lambda_{X'}\|_1+\gamma_4\|\Lambda_{Y'}\|_1+\gamma_5\|W_{X\to Y}\|_F^2+\gamma_6\|W_{Y\to X}\|_F^2\\ \text{s.t.}\ &\|D_X(:,k)\|^2\le 1,\|D_Y(:,k)\|^2\le 1,\ k=1,2,\cdots,K,\end{aligned}\tag{1}$$

其中：$\Lambda_{X'}$ 为高分辨率图像块 X' 在高分辨率字典 D_X 下的表示系数矩阵，$\Lambda_{Y'}$ 为低分辨率图像块 Y' 在低分辨率字典 D_Y 下的表示系数矩阵，$W_{X\to Y}$ 为表示系数矩阵 $\Lambda_{X'}$ 到 $\Lambda_{Y'}$ 之间的映射矩阵，$W_{Y\to X}$ 为表示系数矩阵 $\Lambda_{Y'}$ 到 $\Lambda_{X'}$ 之间的映射矩阵，γ_i 是非负的正则化参数，$i=1,2,\cdots,6$，$D(:,k)$ 表示矩阵的第 k 列，即字典的第 k 个原子，K 为字典的原子数。

对于式(1)，本文运用文献[20]中设计的迭代算法交替求解 $D_X,D_Y,W_{X\to Y},W_{Y\to X}$.在高、低分辨率表示系数相同的假设下，SCSR 和 SCDL 方法采用 ℓ_1 正则项来强调表示系数的稀疏性而忽视其协同性，LCR 采用 ℓ_2 正则项注重表示系数的协同性而忽视稀疏性.本文所提的方法将利用式(1)训练得到的高、低分辨率字典 D_X,D_Y 和映射矩阵 $W_{X\to Y},W_{Y\to X}$，在 SCDL 的基础上同时考虑不同的表示系数的稀疏性和协同性，提出自适应半耦合字典学习的超分辨率图像重建模型求解表示系数：

$$\begin{aligned}\min_{\Lambda_X,\Lambda_Y} &\|X-D_X\Lambda_Y\|_F^2+\|Y-D_Y\Lambda_Y\|_F^2+\\ &\lambda_1\|\Lambda_X-W_{Y\to X}\Lambda_Y\|_F^2+\lambda_2\|\Lambda_Y-W_{X\to Y}\Lambda_X\|_F^2+\\ &\lambda_3\sum_i^n\|D_X diag(\alpha_{x_i})\|_*+\lambda_4\sum_i^n\|D_Y diag(\alpha_{y_i})\|_*\\ s.t.\ &\|D_X(:,k)\|^2\le 1,\|D_Y(:,k)\|^2\le 1,\ k=1,2,\cdots,K,\end{aligned}\tag{2}$$

其中:$\|X\|_*$ 为矩阵 X 的核范，即矩阵 X 的奇异值之和，α_{x_i} 和 α_{y_i} 分别为矩阵 Λ_X 和 Λ_Y 的第 i 列，即第 i 个图像块所对应的表示系数，$i=1,2,\cdots,n$，$Diag(\alpha)$ 为以向量 α 为对角线元素的对角矩阵，λ_i 是非负的正则化参数，$i=1,2,\cdots,n$。

由文献[22,23]可知，$\|Ddiag(\alpha)\|_*$ 具有如下性质:

$$\|\alpha\|_1\le\|Ddiag(\alpha)\|_*\le\|\alpha\|_2 .\tag{3}$$

当矩阵 D 各列不相关时，即 $D^TD=I$，$\|Ddiag(\alpha)\|_*$ 会接近 $\|\alpha\|_1$;当矩阵各列 D 高度相关时，$\|Ddiag(\alpha)\|_*$ 会接近 $\|\alpha\|_2$。在实际应用中，训练得到的高低分辨率字典的原子往往既不是完全独立或者高度相关，所以式(2)运用于图像超分辨重建中可以在稀疏性和协同性之间寻找到合适的系数，以达到好的重建效果。

接下来求解式(2)。首先将式(2)分解成两个子问题：

$$\begin{aligned}&\arg\min_{\Lambda_Y}\|Y-D_Y\Lambda_Y\|_F^2+\lambda_1\|\Lambda_X-W_{Y\to X}\Lambda_Y\|_F^2+\\ &\lambda_2\|\Lambda_Y-W_{X\to Y}\Lambda_X\|_F^2+\lambda_4\sum_i^n\|D_Y diag(\alpha_{y_i})\|_*\\ &=\sum_i^n\left\|\begin{bmatrix}y_i\\ \sqrt{\lambda_1}\alpha_{x_i}\\ \sqrt{\lambda_2}W_{X\to Y}\alpha_{x_i}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}D_Y\\ \sqrt{\lambda_1}W_{Y\to X}\\ \sqrt{\lambda_2}I\end{bmatrix}\alpha_{y_i}\right\|_2^2+\lambda_4\|D_Y diag(\alpha_{y_i})\|_*,\end{aligned}\tag{4}$$

$$\begin{aligned}&\arg\min_{\Lambda_X}\|X-D_X\Lambda_X\|_F^2+\lambda_1\|\Lambda_X-W_{Y\to X}\Lambda_Y\|_F^2+\\ &\lambda_2\|\Lambda_Y-W_{X\to Y}\Lambda_X\|_F^2+\lambda_3\sum_i^n\|D_X diag(\alpha_{x_i})\|_*\\ &=\sum_i^n\left\|\begin{bmatrix}x_i\\ \sqrt{\lambda_2}\alpha_{y_i}\\ \sqrt{\lambda_1}W_{Y\to X}\alpha_{y_i}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}D_X\\ \sqrt{\lambda_2}W_{X\to Y}\\ \sqrt{\lambda_1}I\end{bmatrix}\alpha_{x_i}\right\|_2^2+\lambda_3\|D_X diag(\alpha_{x_i})\|_*.\end{aligned}\tag{5}$$

其次，运用 ADMM 算法求解式(4)(5)。由于式(4)(5)结构相似，这里只给出式(4)的具体求解过程。为了便于描述，下面给出式(4)的向量求解形式。令

$$\bar{y}_i=\begin{bmatrix}y_i\\ \sqrt{\lambda_1}\alpha_{x_i}\\ \sqrt{\lambda_2}W_{X\to Y}\alpha_{x_i}\end{bmatrix},\bar{D}_Y=\begin{bmatrix}D_Y\\ \sqrt{\lambda_1}W_{Y\to X}\\ \sqrt{\lambda_2}I\end{bmatrix},\quad e_i=\bar{y}_i-\bar{D}_Y\alpha_{y_i},Z_i=D_Y diag(\alpha_{y_i})\tag{6}$$

此时，式(4)的向量形式为

$$\arg\min_{\alpha_{y_i}}\|e_i\|_2^2+\lambda_4\|Z_i\|_*,\tag{7}$$

则式(7)的增广拉格朗日函数为

$$\begin{aligned}&L(Z_i,\alpha_{y_i},e_i,v,H,\rho)=\|e_i\|_2^2+\lambda_4\|Z_i\|_*\\ &+\langle v,\bar{y}_i-\bar{D}_Y\alpha_{y_i}-e_i\rangle+\langle H,Z_i-D_Y diag(\alpha_{y_i})\rangle\\ &+\frac{\rho}{2}\left(\|\bar{y}_i-\bar{D}_Y\alpha_{y_i}-e_i\|_2^2+\|Z_i-D_Y diag(\alpha_{y_i})\|_F^2\right),\end{aligned}\tag{8}$$

其中：v 和 H 为拉格朗日乘子，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示矩阵或者向量的内积。根据 ADMM 算法，式(8)迭代流程如下：

$$\begin{cases} Z_i^{k+1} = \arg\min_{Z_i} L(Z_i, \alpha_{y_i}^k, e_i^k, v^k, H^k, \rho^k) \\ \alpha_{y_i}^{k+1} = \arg\min_{\alpha_{y_i}} L(Z_i^{k+1}, \alpha_{y_i}, e_i^k, v^k, H^k, \rho^k) \\ e_i^{k+1} = \arg\min_{e_i} L(Z_i^{k+1}, \alpha_{y_i}^{k+1}, e_i, v^k, H^k, \rho^k) \\ v^{k+1} = v^k + \rho^k(\bar{y}_i - \bar{D}_Y \alpha_{y_i}^{k+1} - e_i^{k+1}) \\ H^{k+1} = H^k + \rho^k(Z_i^{k+1} - D_Y diag(\alpha_{y_i}^{k+1})) \\ \rho^{k+1} = \beta\rho^k \end{cases} \tag{9}$$

式(9)中的 Z_i^{k+1} 的具体求解公式如下：

$$\begin{aligned} Z_i^{k+1} &:= \\ &\arg\min_{Z_i} \lambda_4 \|Z_i\|_* + \langle H^k, Z_i - D_Y diag(\alpha_{y_i}^k)\rangle + \frac{\rho^k}{2}\|Z_i - D_Y diag(\alpha_{y_i}^k)\|_F^2 = \\ &\arg\min_{Z_i} \lambda_4 \|Z_i\|_* + \frac{\rho^k}{2}\left\|Z_i - (D_Y diag(\alpha_{y_i}^k) - \frac{H^k}{\rho^k})\right\|_F^2 = \\ &\varphi_{\frac{\lambda_4}{\rho^k}}\left(D_Y diag(\alpha_{y_i}^k) - \frac{H^k}{\rho^k}\right) \end{aligned} \tag{10}$$

其中：φ 为奇异值缩放算子，设 $D_Y diag(\alpha_{y_i}^k) - \frac{H^k}{\rho^k}$ 的奇异值分解为 $U diag(\sigma) V^T$，其中 σ 为奇异值 σ_i 组成的向量，则式(10)为

$$Z_i^{k+1} = U diag\left(\phi_{\frac{\lambda_y}{\rho_k}}(\sigma)\right) V^T = U diag\left(\max\left\{\sigma_i - \frac{\lambda_y}{\rho_k}, 0\right\}\right) V^T \tag{11}$$

式(9)中的 $\alpha_{y_i}^{k+1}$ 的具体求解公式如下：

$$\begin{aligned} \alpha_{y_i}^{k+1} &:= \arg\min_{\alpha_{y_i}} \langle v^k, -\bar{D}_Y \alpha_{y_i}\rangle + \langle H, -D_Y diag(\alpha_{y_i})\rangle + \\ &\frac{\rho^k}{2}\left(\|\bar{y}_i - \bar{D}_Y \alpha_{y_i} - e_i^k\|_2^2 + \left\|Z_i^{k+1} - D_Y\, diag(\alpha_{y_i})\right\|_F^2\right) \\ &= A_Y diag\left((D_Y)^T\left(\frac{1}{\rho^k} H^k + Z_i^{k+1}\right)\right) + A_Y (\bar{D}_Y)^T\left(\frac{1}{\rho^k} v^k + \bar{y}_i - e_i^k\right) \end{aligned} \tag{12}$$

其中：$A_Y := ((\bar{D}_Y)^T \bar{D}_Y + P(D_Y^T D_Y))^{-1}$，$P$ 为保留对角线元素，其他元素为零的矩阵操作。

式(9)中的 e_i^{k+1} 的具体求解公式如下：

$$\begin{aligned} e_i^{k+1} &:= \arg\min_{e_i} \|e_i\|_2^2 + \langle v^k, \bar{y}_i - \bar{D}_Y \alpha_{y_i}^{k+1} - e_i\rangle + \frac{\rho^k}{2}\|\bar{y}_i - \bar{D}_Y \alpha_{y_i}^{k+1} - e_i\|_2^2 \\ &= \arg\min_{e_i} \frac{1}{\rho^k}\|e_i\|_2^2 + \frac{1}{2}\left\|\frac{1}{\rho^k} v^k + \bar{y}_i - \bar{D}_Y \alpha_{y_i}^{k+1} - e_i\right\|_2^2 \\ &= \left(\frac{1}{\rho^k} v^k + \bar{y}_i - \bar{D}_Y \alpha_{y_i}^{k+1} - e_i\right) \Big/ \left(\frac{2}{\rho^k} + 1\right) \end{aligned} \tag{13}$$

综上所述，式(9)的解为

$$\begin{cases} Z_i^{k+1} = \varphi_{\frac{\lambda_4}{\rho^k}}\left(D_Y diag(\alpha_{y_i}^k) - \frac{H^k}{\rho^k}\right) \\ \alpha_{y_i}^{k+1} = A_Y diag\left((D_Y)^T\left(\frac{1}{\rho^k} H^k + Z_i^{k+1}\right)\right) + A_Y (\bar{D}_Y)^T\left(\frac{1}{\rho^k} v^k + \bar{y}_i - e_i^k\right) \\ e_i^{k+1} = \left(\frac{1}{\rho^k} v^k + \bar{y}_i - \bar{D}_Y \alpha_{y_i}^{k+1} - e_i\right) \Big/ \left(\frac{2}{\rho^k} + 1\right) \\ v^{k+1} = v^k + \rho^k(\bar{y}_i - \bar{D}_Y \alpha_{y_i}^{k+1} - e_i^{k+1}) \\ H^{k+1} = H^k + \rho^k(Z_i^{k+1} - D_Y diag(\alpha_{y_i}^{k+1})) \\ \rho^{k+1} = \beta\rho^k \end{cases} \tag{14}$$

类似地，可以得到式(5)的迭代解：

$$\begin{cases} Z_j^{k+1} = \varphi_{\frac{\lambda_3}{\rho^k}}\left(D_X diag(\alpha_{x_j}^k) - \frac{H^k}{\rho^k}\right) \\ \alpha_{x_j}^{k+1} = A_X diag\left((D_X)^T\left(\frac{1}{\rho^k} H^k + Z_j^{k+1}\right)\right) + A_X (\bar{D}_X)^T\left(\frac{1}{\rho^k} v^k + \bar{x}_j - e_j^k\right) \\ e_j^{k+1} = \left(\frac{1}{\rho^k} v^k + \bar{x}_j - \bar{D}_X \alpha_{x_j}^{k+1} - e_j\right) \Big/ \left(\frac{2}{\rho^k} + 1\right) \\ v^{k+1} = v^k + \rho^k(\bar{x}_j - \bar{D}_X \alpha_{x_j}^{k+1} - e_j^{k+1}) \\ H^{k+1} = H^k + \rho^k(Z_j^{k+1} - D_X diag(\alpha_{x_j}^{k+1})) \\ \rho^{k+1} = \beta\rho^k \end{cases} \tag{15}$$

其中：$\bar{x}_j = \begin{bmatrix} x_j \\ \sqrt{\lambda_2}\alpha_{y_j} \\ \sqrt{\lambda_1} W_{Y\to X}\alpha_{y_j} \end{bmatrix}$，$\bar{D}_X = \begin{bmatrix} D_X \\ \sqrt{\lambda_2} W_{X\to Y} \\ \sqrt{\lambda_1} I \end{bmatrix}$，

$e_j = \bar{x}_j - \bar{D}_X \alpha_{x_j}$，$A_X := ((\bar{D}_X)^T \bar{D}_X + P(D_X^T D_X))^{-1}$，$P$ 为保留对角线元素，其他元素为零的矩阵操作。

本文中式(14)和(15)迭代的终止条件为

$$\max(\|\bar{c} - D\alpha - e\|_\infty, \|Z - D diag(\alpha)\|_\infty) \le \varepsilon \tag{16}$$

其中：ε 为预设的阈值，$\bar{c}$ 在式(14)中为 $\bar{y}_i$，在式(15)中为 $\bar{x}_j$，D 在式(14)中为 $\bar{D}_Y$，在式(15)中为 $\bar{D}_X$，α 在式(14)中为 α_{y_i}，在式(15)中为 α_{x_j}。

利用式(1)训练出来的高分辨率字典 D_X 和式(4)(5)求解出来的高分辨率图像块所对应的系数矩阵 Λ_X，可以重建出高分辨率图像块

$$X \approx D_X \Lambda_X \tag{17}$$

综上，本文所提的基于自适应半耦合字典学习的超分辨率图像重建算法如算法 1 所示。

算法 1　基于自适应半耦合字典学习的超分辨率图像重建算法

输入：需要重建的低分辨率图像 I_ℓ，外部训练图片相应的高、低分辨率图像块拉成的列向量所组成的矩阵 $X' = [x'_1, x'_2, \cdots, x'_m]$，$Y' = [y'_1, y'_2, \cdots, y'_m]$。

通过式(1)训练得到高分辨率字典 D_X，低分辨率字典 D_Y，以及高、低分辨率系数之间的相互映射矩阵 $W_{X\to Y}$ 和 $W_{Y\to X}$。

先对图像 I_ℓ 双三次插值，然后提取低分辨率图像块 $Y = [y_1, y_2, \cdots, y_n]$。

对于每一个低分辨率图像块 y_i，通过式(4)(5)求解得到其对应的高分辨率字典下的表示系数 $\alpha_{x_i}^*$，并利用 $D_X\alpha_{x_i}^*$ 得到 y_i 的重建图像块 x_i。

将所有重建后的图像块 $X = [x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 融合成为图像 I_h。

输出：重建后的图像 I_h。

2　实验与分析

本章将通过本文方法和 Bicubic 方法、SCSR[8]方法、LCR[18]方法、ASCSR[19]方法和 SCDL[20]等方法的比较实验说明本文提出的 ASCDSR 算法在图像超分辨重建中的重要作用。首先，在无噪声情况下进行实验比较；其次，为了验证本文方法的鲁棒性，将在高斯噪声、椒盐噪声等情况下进行图像重建比较。

实验均采用峰值信噪比（peak signal-to-noise ratio，PSNR）和结构相似性（structural similarity index，SSIM）作为图像超分辨率重建效果的评价指标。实验中所用到的测试图像如图 1 所示。

为了避免由于重建阶段提取图像块的步长和图像块的尺寸不同造成重建效果不同，实验中提取图像块的步长统一为 4，尺寸为 5×5。高、低分辨率字典大小均为 512，重建模型的正则化参数 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0.1$。本文实验在 Intel® Xeon® CPU E5-1630 v3 @ 3.70 GHz、内存为 96 GB、操作系统为 Windows10、MATLAB 版本为 R2016b 的计算环境中进行。

2.1　无噪声图像重建

本节将进行本文所提的 ASCDSR 方法和现有的 Bicubic 方法、SCSR[8]方法、LCR[18]方法、ASCSR[19]方法和 SCDL[20]在无噪声环境下的实验比较。表 1 是上述方法对不同的测试

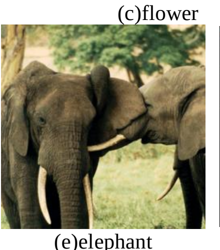
图像在放大因子为 2 时重建图像的峰值信噪比(dB)和结构相似度的比较，其中效果排第一的指标值用黑色粗体标注，效果排第二的指标值用下划线标注。为了从视觉上直观感受重建效果，图 2 给出了不同方法对图像“Bird”的重建效果图。


(a)pens


(b)parrots

(c)flower


(d)bird


(e)elephant


(f)foreman (g)pepper

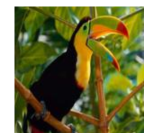
图 1　本文实验所用的测试图像

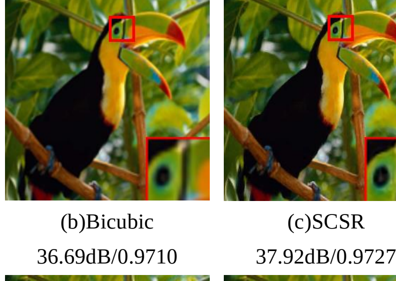
Fig. 1　Testing images used in the experiments

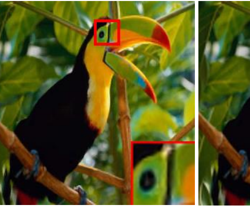
表 1　六种重建方法在无噪声环境下的比较结果

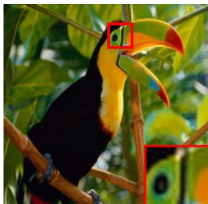
Table 1　Comparison results of six reconstruction methods under noiseless environment

图像	比较项	Bicubic	SCSR[8]	LCR[18]	ASCSR[19]	SCDL[20]	ASCDSR
pens	PSNR	32.00	32.94	33.11	<u>33.20</u>	33.18	**33.30**
	SSIM	0.9210	0.9369	0.9402	<u>0.9436</u>	0.9417	**0.9446**
parrots	PSNR	31.38	32.65	33.04	33.03	<u>33.14</u>	**33.18**
	SSIM	0.9376	0.9468	0.9473	0.9492	<u>0.9503</u>	**0.9519**
flower	PSNR	30.45	31.82	31.93	31.96	**32.00**	**32.00**
	SSIM	0.8949	0.9219	0.9179	0.9221	<u>0.9235</u>	**0.9246**
bird	PSNR	36.69	37.92	38.15	<u>38.30</u>	38.14	**38.59**
	SSIM	0.9710	0.9727	0.9756	<u>0.9770</u>	0.9755	**0.9790**
Elephant	PSNR	33.12	34.15	34.28	<u>34.60</u>	34.51	**34.62**
	SSIM	0.9155	0.9247	0.9314	<u>0.9351</u>	0.9324	**0.9354**
Foreman	PSNR	32.71	33.57	34.08	33.84	<u>34.14</u>	**34.20**
	SSIM	0.9447	0.9516	0.9549	0.9540	<u>0.9561</u>	**0.9576**
Pepper	PSNR	31.90	33.34	33.38	33.21	<u>33.22</u>	**33.50**
	SSIM	0.9367	0.9455	0.9469	0.9468	<u>0.9471</u>	**0.9506**


(a)低分辨率图像
(PNSR/SSIM)


(b)Bicubic
36.69dB/0.9710


(c)SCSR
37.92dB/0.9727


(d)LCR
38.15dB/0.9756


(e)ASCSR
38.30dB/0.9770

(f)SCDL
38.14dB/0.9755

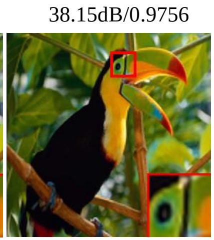

(g)本文 ASCDSR
38.59dB/0.9790

图 2　六种重建方法在无噪声“Bird”图像上的重建效果图

Fig. 2. Reconstructed “Bird” images of six methods without noise

从表 1 可以看出，在无噪声的情况下本文所提的 ASCDSR 方法对所有 7 张测试图像都能达到最好的效果。即使本文方法和 SCDL 方法在图像“Flower”上取得相同的峰值信噪比，但是本文方法重建图像的结构相似度要高于 SCDL 所重建的。

2.2　椒盐噪声

本节将设计实验考察本文 ASCDSR 方法和 Bicubic 方法、SCSR[8]方法、LCR[18]方法、ASCSR[19]方法、SCDL[20]对带有椒盐噪声图像的重建效果。对图像“elephant”“foreman”和“pepper”分别添加噪声密度 n 为 5×10^{-4} 和 1×10^{-3} 的椒盐噪声。表 2 是上述方法对带有椒盐噪声图像“elephant”“foreman”和“pepper”在放大因子为 2 时的重建效果，其中效果排第一的指标值用黑色粗体标注，效果排第二的指标值用下划线标注。从表 2 可以看出，本文 ASCDSR 方法重建出来的图像在峰值信噪比和结构相似度上都要比其他方法所得的相应值要好。

表 2　六种重建方法在椒盐噪声下的比较结果

Table 2　Comparison results of six reconstruction methods with salt and pepper noise

图像		比较项	Bicubic	SCSR[8]	LCR[18]	ASCSR[19]	SCDL[20]	ASCDSR
elephant	$n=5\times10^{-4}$	PSNR	32.77	33.15	33.22	**33.51**	33.43	**33.51**
		SSIM	0.9111	0.9171	0.9236	<u>0.9281</u>	0.9249	**0.9278**
	$n=1\times10^{-3}$	PSNR	32.59	32.70	32.75	32.90	<u>32.93</u>	**33.01**
		SSIM	0.9091	0.9140	0.9202	<u>0.9214</u>	0.9213	**0.9242**
foreman	$n=5\times10^{-4}$	PSNR	32.56	33.11	33.57	33.38	<u>33.62</u>	**33.66**
		SSIM	0.9414	0.9455	0.9487	0.9436	<u>0.9500</u>	**0.9514**
	$n=1\times10^{-3}$	PSNR	32.09	31.90	32.17	32.09	<u>32.21</u>	**32.35**
		SSIM	0.9340	0.9333	0.9367	0.9351	<u>0.9381</u>	**0.9394**
pepper	$n=5\times10^{-4}$	PSNR	31.66	32.59	32.17	32.47	<u>32.49</u>	**32.71**
		SSIM	0.9326	0.9387	0.9359	0.9396	<u>0.9403</u>	**0.9437**
	$n=1\times10^{-3}$	PSNR	31.61	<u>32.35</u>	32.00	32.27	32.28	**32.49**
		SSIM	0.9309	0.9348	0.9324	0.9359	<u>0.9367</u>	**0.9400**

表 3　六种重建方法在高斯噪声下的比较结果

Table 3　Comparison results of six reconstruction methods with Gaussian noise

图像		比较项	Bicubic	SCSR[8]	LCR[18]	ASCSR[19]	SCDL[20]	ASCDSR
elephant	σ=0.01	PSNR	32.93	33.45	33.66	33.97	33.86	**34.00**
		SSIM	0.9097	0.9073	0.9160	0.9200	0.9167	**0.9201**
	σ=0.02	PSNR	32.40	31.79	31.90	32.46	32.36	**32.47**
		SSIM	**0.8936**	0.8643	0.8752	0.8796	0.8766	0.8796
foreman	σ=0.01	PSNR	32.54	33.03	33.39	33.27	33.49	**33.59**
		SSIM	**0.9346**	0.9231	0.9231	0.9308	0.9279	0.9297
	σ=0.02	PSNR	32.07	31.79	31.90	31.97 1.97	32.10	**32.20**
		SSIM	**0.9083**	0.8579	0.8533	0.8630	0.8624	0.8639
pepper	σ=0.01	PSNR	31.75	32.74	32.42	32.72	32.75	**32.94**
		SSIM	**0.9287**	0.9208	0.9210	0.9246	0.9253	0.9282
	σ=0.02	PSNR	31.35	31.40	31.30	31.54	31.55	**31.69**
		SSIM	**0.9066**	0.8608	0.8653	0.8673	0.8694	0.8722

2.3　高斯噪声

本节将设计实验考察本文 ASCDSR 方法和 Bicubic 方法、SCSR[8]方法、LCR[18]方法、ASCSR[19]方法、SCDL[20]对带有高斯噪声图像的重建效果。对图像“elephant”“foreman”和“pepper”分别添加均值为 0、标准差 σ 为 0.01 和 0.02 的高斯噪声。表 3 是上述方法对带有高斯噪声图像“elephant”“foreman”和“pepper”在放大因子为 2 时的重建效果，其中效果排第一的指标值用黑色粗体标注，效果排第二的指标值用下划线标注。

从表 3 可以看出，本文 ASCDSR 方法在峰值信噪比上都保持最高的效果，尤其 σ=0.02 时，SCDL 等方法对图像“elephant”重建效果均比 Bicubic 差，只有本文的方法效果优于 Bicubic。在结构相似度上本文方法基本排在第二或者第三，除了图像“elephant”在标准差为 0.01 的高斯噪声污染下，所有基于字典学习的方法的结构相似度均不如 Bicubic。

2.4　重建时间

本节将对本文 ASCDSR 方法和 SCSR[8]方法、LCR[18]方法、ASCSR[19]方法、SCDL[20]方法进行重建时间比较，具体重建时间见表 4，其中表 4 中的时间是图 1 中七张图像的重建时间的平均值。

表 4　五种算法的重建时间比较

Table 4　Reconstruction time comparison of five methods

方法	重建时间/s
LCR[18]	1.55
SCSR[8]	4.72
SCDL[20]	57.73
ASCSR[19]	1373.92
本文 ASCDSR	1798.05

从表 4 中可以看出，LCR、SCSR 和 SCDL 方法的重建速度较快，ASCSR 和本文的方法重建速度较慢。原因是 LCR 中用解析解来求解 ℓ_2 正则化模型，无须迭代过程。SCSR 和 SCDL 都是求解简单的 ℓ_1 正则化模型，用压缩感知的方法就可以较快地求解。而 ASCSR 和本文的方法是求解带有核范的正则化模型，需要用 ADMM 来求解。在求解过程中，由于核范正则项需要涉及矩阵的奇异值分解，所以重建时间要比 LCR、SCSR 和 SCDL 长。另外，本文的方法比 ASCSR 多考虑高、低分辨率系数之间的线性映射关系，所以重建时间上又要比 ASCSR 方法长。

3　结束语

本文基于半耦合字典学习的超分辨率重建方法上，考虑表示系数的稀疏性和协同性，利用核范数构建一个新的正则项，并用交替方向乘子法(ADMM)求解优化模型，得到了基于自适应半耦合字典学习的超分辨率图像重建算法。该方法假设高、低分辨率系数存在某种映射关系，从而放宽了模型的约束条件，同时根据字典的变化能自适应地平衡稀疏性和协同性。实验说明本文所提方法要比目前已有的一些重建方法具有更好的峰值信噪比和结构相似度，且对于噪声干扰也具有一定的鲁棒性。

模型中没有考虑局部相似性等其他先验知识，下一步工作将考虑如何加入合理的先验知识来提高图像的重建效果。

参考文献：

[1] Sina F, Dirk R, Michael E, el al. Advances and challenges in super-resolution [J]. International Journal of Imaging Systems and Technology, 2004, 2: 47-57.

[2] Wang Nannan, Tao Dacheng, Gao Xinbo, *et al.* A comprehensive survey to face hallucination [J]. International Journal of Computer Vision, 2014, 106(1): 9-30.

[3] Wang Lizhe, Lu Ke, Liu Peng. Compressed sensing of a remote sensing image based on the priors of the reference image [J]. IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, 2014, 12(4): 736-740.

[4] Greenspan H. Super-resolution in medical imaging [J]. The Computer Journal, 2009, 52(1): 43-63.

[5] Dodgson N A. Quadratic interpolation for image resampling [J]. IEEE Trans on Image Processing, 1997, 6(9): 1322-1326.

[6] Irani M, Peleg S. Improving resolution by image registration [J]. CVGIP: Graphical Models and Image Processing, 1991, 53(3): 231-239.

[7] Su Heng, Zhou Jie, Zhang Zhihao. Survey of super-resolution image reconstruction methods [J]. ACTA Automatica Sinica, 2013, 39(8): 1202-1213.

[8] Yang Jianchao, Wright J, Huang T S, *et al.* Image super-resolution via sparse representation [J]. IEEE Trans on Image Processing, 2010, 19(11): 2861-2873.

[9] Yang Wenhan, Feng Jiashi, Yang Jianchao, *et al.* Deep edge guided recurrent residual learning for image super-resolution [J]. IEEE Trans on Image Processing, 2017, 26(12): 5895-5907.

[10] Aharon M, Elad M, Bruckstein A. K-SVD: An algorithm for designing overcomplete dictionaries for sparse representation [J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2006, 54(11): 4311-4322.

[11] Zeyde R, Elad M, Protter M. On single image scale-up using sparse-representations [C]// Proc of the 7th International Conference on Curves and Surfaces. Berlin: Springer, 2010: 711-730.

[12] Lu Xiaoqiang, Yuan Haoliang, Yan Pingkun, *et al.* Geometry constrained sparse coding for single image super-resolution [C]// Proc of IEEE Computer Vision and Pattern Recognition. Washington, DC: IEEE Computer Society, 2012: 1648-1655.

[13] Cao Feilong, Cai Miaomiao, Tan Yuanpeng, *et al*. Image super-resolution via adaptive lp (0<p<1) regularization and sparse representation [J]. IEEE Trans on Neural Networks and Learning Systems, 2016, 27 (7): 1550-1561.

[14] Mousavi H S, Monga V. Sparsity-based color image super resolution via exploiting cross channel constraints [J]. IEEE Trans on Image Processing, 2017, 26(11): 5094-5106.

[15] Xie Chao, Zeng Weili, Jiang Shenqin, *et al.* Bidirectionally aligned sparse representation for single image super-resolution [J]. Multimedia Tools and Applications, 2017, 77(7): 7889-7907.

[16] Yang Wenming, Yuan Tingrong, Wang Wei, *et al*. Single-image super-resolution by subdictionary coding and kernel regression [J]. IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics Systems, 2017, 47(9): 2478-2488.

[17] Zhang Lei, Yang Meng, Feng Xiangchu. Sparse representation or collaborative representation: which helps face recognition? [C]// Proc of IEEE International Conference on Computer Vision. Piscataway, NJ: IEEE Press, 2011: 471-478.

[18] 蔡苗苗，谈元鹏，曹飞龙. 基于局部结构相似与协同表示的超分辨率图像重建 [J]. 模式识别与人工智能，2014, 27(9): 787-793. (Cai Miaomiao, Tan Yuanpeng, Cao Feilong. Super-resolution image reconstruction based on local structural similarity and collaborative representation [J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2014, 27(9): 787-793.)

[19] Zhao Jianwei, Hu Heping, Cao Feilong. Image super-resolution via adaptive sparse representation [J]. Knowledge-Based Systems, 2017, 124: 22-23.

[20] Wang Shenlong, Zhang Lei, Liang Yan, *et al*. Semi-coupled dictionary learning with applications to image super-resolution and photo-sketch synthesis [C]// Proc of IEEE Computer Vision and Pattern Recognition. Washington DC: IEEE Computer Society, 2012: 2216-2223.

[21] Yang Junfeng, Yuan Xiaoming. Linearized augmented lagrangian and alternating direction methods for nuclear norm minimization [J]. Mathematics of Computation, 2012, 82(281): 301-329.

[22] Grave E, Obozinski G, Bach F. Trace lasso: a trace norm regularization for correlated designs [C]// Proc of the 25th Annual Conference on Neural Information Processing Systems. New York: Curran Associates Inc. , 2011: 2187-2195.

[23] Wang Jing, Lu Canyi, Wang Meng, *et al.* Robust face recognition via adaptive sparse representation [J]. IEEE Trans on Cybernetics, 2014, 44(12): 2368-2378.